7-1-19

Ορισμός: Έστω L οικογένεια συναρτήσεων στον X. L διαχωρίζει τα σημεία του X αν:
$\forall x,y \in X$ με $x \neq y$ $\exists f \in L$ τω $f(x) \neq f(y)$

Ορισμός: Έστω L γραμμικός υπόχωρος του $C(X)$. L λέμε ότι είναι lattice αν $\forall f,g \in L$ $f \vee g,\ f \wedge g \in L$

όπου: $(f \wedge g)(x) \overset{\text{ορσ.}}{=} \min\{f(x), g(x)\}$
$(f \vee g)(x) \overset{\text{ορσ.}}{=} \max\{f(x), g(x)\}$

ΛΗΜΜΑ 1 Έστω L γρ. υπόχωρος του $C(X)$. Ο L είναι lattice αν-ν $\forall f \in L$: $|f| \in L$

ΛΗΜΜΑ 2: Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ, $L \subseteq C(X)$ lattice που διαχωρίζει τα σημεία του X και $\mathbb{1} \in L$. Έστω $g \in C(X)$ $a \in X$ $\varepsilon > 0$ τότε $\exists f \in L$ τω $f(a) = g(a)$ κ $f(x) > g(x) - \varepsilon$ $\forall x \in X$

Θεώρημα (Stone - Weistress για lattics)
Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ, $L \subseteq C(X)$ lattice που διαχωρίζει τα σημεία X, $\mathbb{1} \in L$. Έστω $g \in C(X)$ $\varepsilon > 0$
Τότε $\exists f \in L$ τω $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$
(Ισχ. $\overline{L} = C(X)$ με την ομοιόμορφη μετρική)

Απόδειξη Έστω $x \in X$ τότε από το ΛΗΜΜΑ 2: $\exists f_x \in L$ τω $f_x > g - \varepsilon$ κ $f_x(x) = g(x)$

Έχουμε: $f_x(x) < g(x) + \varepsilon \xRightarrow{\text{συνέχεια}} \exists r_x > 0$ τω $\forall y \in B(x, r_x)$: $f_x(y) < g(y) + \varepsilon$

Έχουμε: $\{B(x,r_x)\ x \in X\}$ ανοιχτή κάλυψη του $X \Rightarrow$
$\exists x_1, x_2, \dots, x_n$ τω $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$

Θέτουμε: $f = f_{x_1} \wedge \dots \wedge f_{x_n} \Rightarrow f > g - \varepsilon$

Έστω $y \in X \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}$ τω $y \in B(x_i, r_{x_i}) \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow f_{x_i}(y) < g(y) + \varepsilon \\ f(y) \leq f_{x_i}(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f < g + \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall y \in X,\ g(y) - \varepsilon < f(y) < g(y) + \varepsilon \Rightarrow \|f-g\|_\infty < \varepsilon \leq 2\varepsilon$

$\longleftrightarrow$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\mathcal{F}$ ενα γραμμικός χώρος συναρτήσεων από τον X
Αν $\forall f, g \in \mathcal{F}$, $f \cdot g \in \mathcal{F}$ ο $\mathcal{F}$ ονομάζεται άλγεβρα.

Θεώρημα (Stone - Weistress για άλγεβρες)
Έστω (X, d) συμπαγής μ.χ $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ άλγεβρα με τις ιδιότητες:
1. διαχωρίζει τα σημεία του X
2. $\mathbb{1} \in \mathcal{F}$

Τότε $\overline{\mathcal{F}} = C(X)$ με την ομοιόμορφη μετρική

Πόρισμα (Θ. Stone - Weistress)
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ A συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $\exists$ ακολουθία πολυωνύμων $\{P_n\}$ τω $P_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$

Αποδ. Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(X = A)$ Τότε $\mathcal{F} \subseteq C(A)$, $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα συναρτήσεων
$\mathbb{1} \in \mathcal{F}$ και $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του X επειδή
αν $\alpha, \beta \in A$ το πολυώνυμο $\boxed{P(x) = |x-a|^2} \in \mathcal{F}$ κ
$P(a) = 0 \neq P(\beta)$

$\xrightarrow[\text{για άλγεβρες}]{\text{Stone-Weistress}}$ $\overline{\mathcal{F}} = C(A) \Longrightarrow \exists \{P_n\} \subseteq \mathcal{F}$ τω $P_n \xrightarrow{D} f$

$\Longleftrightarrow P_n \xrightarrow{\text{ομοιομ}} f$

ΛΗΜΜΑ Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{x}$. Τότε υπάρχει $\{P_n\}$ ακολουθία πολυωνύμων (μιας μεταβλητής) τω $P_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$ στο $[0,1]$

Απόδειξη (Θεωρήματος Stone-Weierstrass για άλγεβρες)

Θδο $\overline{\mathcal{F}}$ (με την ομοιόμορφη μετρική) είναι lattice.

Τότε $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = C(X) \Rightarrow \overline{\mathcal{F}} = C(X)$

Ισχυρισμός 1: $\overline{\mathcal{F}}$ γραμμικός υπόχωρος του $C(X)$

Απόδ. $\forall f \in \overline{\mathcal{F}}, \exists \{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ τω $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f \Rightarrow f \in C(X)$

Άρα $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(X)$.

Έστω $f,g \in \overline{\mathcal{F}}$ $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists \{f_n\},\{g_n\}$: $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} g \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_\infty$$

$$\leq \lambda \|f_n - f\|_\infty + \mu \|g_n - g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda f_n + \mu g_n}_{\in \mathcal{F}} \to \lambda f + \mu g \in \overline{\mathcal{F}}$$

Ισχυρισμός 2: Έστω $g \in \mathcal{F}$, έστω $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ πολυώνυμο

Τότε $P(g) \in \mathcal{F}$

Απόδειξη $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$

Για $k \in \mathbb{N}$: $\underbrace{g^k \in \mathcal{F}}_{\text{διότι}}$

$(g^0 = 1 \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{F}, g^2 \in \mathcal{F}, g^3 = g^2 g \in \mathcal{F})$

$\mathcal{F}$ δχ χώρος $\Rightarrow a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \ldots + a_n g^n \in \mathcal{F} \Rightarrow P(g) \in \mathcal{F}$

Ισχύει: $f \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow p(f) \in \overline{\mathcal{F}}$

Διότι: $\exists \{f_n\} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ τω $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f \xRightarrow{\text{Εύκολα}}$

$$\Rightarrow p(f_n) \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} p(f)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(f) \in \overline{\mathcal{F}}}$$

Έστω $\{P_n\}$ ακολουθία πολυωνύμων τω $P_n(x) \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} \sqrt{x}$ στο $[0,1]$

Έστω $f \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow f^2 \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow \dfrac{f^2}{\|f^2\|_\infty} \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_n\left(\frac{f^2}{\|f^2\|_\infty}\right) \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow \sqrt{\frac{f^2}{\|f^2\|_\infty}} \in \overline{\mathcal{F}}$$

$$\Rightarrow \frac{|f|}{\|f\|_\infty} \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow \boxed{|f| \in \overline{\mathcal{F}}} \quad (1)$$

Άρα από Ισχυρισμό 1 και σχέση (1) έχουμε $\overline{\mathcal{F}}$ lattice.

$\longleftrightarrow$

Απόδειξη Λήμμα

Θέταμε $P_1(x) \equiv 0$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}[x - P_n^2(x)]$ $n \in \mathbb{N}$

Ισχυρισμός: $0 \le P_n(x) \le \sqrt{x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [0,1]$

Απόδειξη (Με επαγωγή στο n)

Για $n=1$ ✓

Έστω ότι ισχύει για $n=k$.

$n=k+1$: $\sqrt{x} - P_{k+1}(x) = \sqrt{x} - P_k(x) - \frac{1}{2}[x - P_k^2(x)]$

$$\sqrt{x} - P_{k+1}(x) = \underbrace{\left(\sqrt{x} - P_k(x)\right)}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_k(x)\right)\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

- $\sqrt{x} + P_k(x) \leq 2\sqrt{x}$

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_k(x)\right) \geq -\sqrt{x} \geq -1$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_k(x)\right) \geq -1$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_k(x)\right) \geq 0}$$

Άρα $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$ και $\{P_n(x)\}$ αύξουσα

$\Rightarrow \{P_n(x)\}$ συγκλίνει $\forall x \in [0,1]$

Άρα αν $l = \lim P_n(x) \Rightarrow l = l + 1/2\,[x - l^2] \Rightarrow l = \pm\sqrt{x}$

$\overset{P_n(x) \geq 0}{\Longrightarrow} l = \sqrt{x} \Rightarrow P_n(x) \longrightarrow \sqrt{x} \quad \forall x \in [0,1]$

Επίσης $\{P_n\}$ αύξουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ και συγκλίνει κατά σημείο σε συνεχή συνάρτηση $\sqrt{x}$

$\overset{\text{Θεώρημα}}{\underset{\text{Dini}}{\Longrightarrow}} P_n(x) \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} \sqrt{x}$ στο $[0,1]$.

<u>Άσκηση</u> Αν $\mathcal{A}$ οικογένεια ξένων ανά 2 διαστημάτων

ΝΔΟ $\mathcal{A}$ το πολύ αριθμήσιμη.

<u>Απόδ.</u> Για κάθε διάστημα διαλέγω έναν ρητό.

Άρα τα διαστήματα είναι ξένα μεταξύ τους η αντιστοιχία είναι μοναδική δηλ. $\forall I \in \mathcal{A} \ \exists q_I \in \mathbb{Q}$ τω $q_I \in I$

Άρα μπορώ να βρω μια απεικόνιση $\Phi: \mathcal{A} \to \mathbb{Q} : \Phi(I) = q_I$

Προφανώς $\left.\begin{array}{l}\Phi: 1\text{-}1 \\ \Phi: \text{επί}\end{array}\right\} \Rightarrow$ ~~και επειδή~~ Το $\mathcal{A}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο

Άσκηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα.

Ν.δ.ο. το σύνολο των σημείων ασυνέχειας είναι το πολύ αριθμήσιμο

Λύση:

Αφού f αύξουσα $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to\xi^{\pm}} f(x)$ υπάρχουν

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Για αύξουσες συναρτήσεις ισχύει ΠΑΝΤΑ:}} \\ \lim_{x\to\xi^-} f(x) \le f(\xi) \le \lim_{x\to\xi^+} f(x)\end{array}}$$

Άρα, f είναι ασυνεχής στο $\xi \in \mathbb{R}$ αν-ν

$$\boxed{\lim_{x\to\xi^-} f(x) < \lim_{x\to\xi^+} f(x)}$$

Έστω Σ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f

Θέτουμε: $A = \left\{ \left(\lim_{x\to\xi^-} f(x), \lim_{x\to\xi^+} f(x)\right) \ \xi \in \Sigma \right\}$

$\boxed{A \text{ ισοπληθής με το } \Sigma.}$

Έστω $I_1, I_2 \in A$ και $\boxed{I_1 \neq I_2}$

Τότε $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ (έστω πχ $\xi_1 < \xi_2$)

με $I_j = \left(\lim_{x\to\xi_j^-} f(x), \lim_{x\to\xi_j^+} f(x)\right)$ $j = 1, 2$

Αρκεί νδο $\lim_{x\to\xi_j^+} f(x) \le \lim_{x\to\xi_j^-} f(x)$

Έστω $\xi_1 < y < \xi_2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi_1^+} f(x) \leq f(y)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi_1^+} f(x) \leq \lim\limits_{y \to \xi_2^+} f(y)$

$\longleftrightarrow$

Άσκηση: Έστω $\{f_n\} \subseteq C(X)$ $f: X \to \mathbb{R}$, $\forall A \subseteq X$ συμπαγές $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f$ στο A.
Νδο f συνεχής

Λύση:

Έστω $X = \mathbb{R}$

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Στο $[a-\delta, a+\delta]$ $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f$

$\Rightarrow f_{|[a-\delta, a+\delta]}$ συνεχής $\Rightarrow f$ συνεχής στο a

Έστω X είναι τυχαίος $\mu.X$

Έστω $\{x_n\} \subseteq X$ τω $x_n \to x \in X$

Αρκεί νδο $f_n(x) \to f(x)$

Διαλέγουμε $A = \{x_n \; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

A συμπαγές. $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f$ στο $A \Rightarrow f_{|A}$ συνεχής

$\left.\begin{array}{l} \text{Όμως } \{x_n\} \text{ ακολουθία του } A \\ x_n \to x \\ f_{|A} \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x).$